Métodos de integración

Calcular las siguientes integrales inmediatas:

1. \[ \int 4x^5 \, dx \]  
   Solución: \( \frac{2}{3} x^6 + C \)

2. \[ \int 2\sqrt{x} \, dx \]  
   Solución: \( \frac{4}{3} x\sqrt{x} + C \)

3. \[ \int \frac{1}{5x^3} \, dx \]  
   Solución: \( -\frac{1}{10x^2} + C \)

4. \[ \int \sqrt{2x^3} \, dx \]  
   Solución: \( \frac{2\sqrt{2}}{5} x^2\sqrt{x} + C \)

5. \[ \int \frac{7}{\cos^2 x} \, dx \]  
   Solución: \( 7\tan x + C \)

6. \[ \int \frac{\cos x}{3} \, dx \]  
   Solución: \( \frac{1}{3} \sin x + C \)

7. \[ \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \]  
   Solución: \( \arcsin x + C \)

8. \[ \int 10^x \, dx \]  
   Solución: \( \frac{10^x}{\ln 10} + C \)

9. \[ \int -\frac{5}{1+x^2} \, dx \]  
   Solución: \( -5 \arctan x + C \)

10. \[ \int 3e^x \, dx \]  
    Solución: \( 3e^x + C \)

Calcular, mediante el método de descomposición en sumandos, las siguientes integrales:

11. \[ \int (1-2x)^4 \, dx \]  
    Solución: \( \frac{16}{5} x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 4x^2 + x + C \)

12. \[ \int (2 + \cos x)^3 - \cos^2 x \, dx \]  
    Solución: \( 4(x + \sin x) + C \)

13. \[ \int (3 + 5x - \sin x) \, dx \]  
    Solución: \( \frac{5}{2} x^2 + 3x + \cos x + C \)

14. \[ \int (\sqrt{x} - x)^3 \, dx \]  
    Solución: \( \frac{2}{5} x^2\sqrt{x} - x^3 + \frac{6}{7} x^3\sqrt{x} - \frac{1}{4} x^4 + C \)

15. \[ \int \frac{1-\sqrt{x}}{x} \, dx \]  
    Solución: \( \ln x - 2\sqrt{x} + C \)
Calcular, por el método de cambio de variable, las siguientes integrales:

16. \( \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 5x}} \) Cambio : \( t = 1 - 5x \)  
   Sol: \( -\frac{2}{5}\sqrt{1 - 5x} + C \)

17. \( \int e^{5x} \, dx \) Cambio : \( t = 5x \)  
   Sol: \( \frac{e^{5x}}{5} + C \)

18. \( \int \cos 4x \, dx \) Cambio : \( t = 4x \)  
   Sol: \( \frac{\sin 4x}{4} + C \)

19. \( \int \frac{7x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \) Cambio : \( t = 1 - x^2 \)  
   Sol: \( -7\sqrt{1 - x^2} + C \)

20. \( \int \frac{7}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx \) Cambio : \( t = 2x \)  
   Sol: \( \frac{7}{2}\arcsen 2x + C \)

21. \( \int \sen x \cos x \, dx \) Cambio : \( t = \sen x \)  
   Sol: \( -\frac{\cos 2x}{4} + C \)

22. \( \int \tan x \, dx \) Cambio : \( t = \cos x \)  
   Sol: \( -\ln|\cos x| + C \)

23. \( \int \frac{dx}{x - 4} \) Cambio : \( t = x - 4 \)  
   Sol: \( \ln|x - 4| + C \)

24. \( \int \frac{1 + 2x}{1 + x^2} \, dx \) Cambio : \( t = x + 1 \)  
   Sol: \( \text{arctag} x + \ln|1 + x^2| + C \)

25. \( \int \frac{4x \, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} \) Cambio : \( t = 1 - 4x^2 \)  
   Sol: \( \sqrt{1 - 4x^2} + C \)

26. \( \int 3^x \, dx \) Cambio : \( t = 3x \)  
   Sol: \( \frac{3^x - 1}{\ln 3} + C \)

27. \( \int \frac{2 \cos x}{5 + 3\sen x} \, dx \) Cambio : \( t = 5 + 3\sen x \)  
   Sol: \( \frac{2}{3}\ln|5 + 3\sen x| + C \)

28. \( \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}} \) Cambio : \( t = \frac{2x}{5} \)  
   Sol: \( \frac{1}{2}\arcsen \frac{2x}{5} + C \)

29. \( \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \) Cambio : \( t = x + 1 \)  
   Sol: \( \arctag(x + 1) + C \)

30. \( \int \frac{e^\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \) Cambio : \( t = \sqrt{x} \)  
   Sol: \( \frac{2}{5}e^{\sqrt{x}} + C \)

31. \( \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} \, dx \) Cambio : \( t = x^2 + 2x + 2 \)  
   Sol: \( \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 2| + C \)

32. \( \int \frac{2\sen x}{\cos^2 x} \, dx \) Cambio : \( t = \cos x \)  
   Sol: \( \frac{1}{\cos^2 x} + C \)

33. \( \int \frac{5 \, dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsen x} \)  
   Sol: \( 5\ln|\arcsen x| + C \)

34. \( \int \frac{x^5}{x^6 + 5} \, dx \)  
   Sol: \( \frac{1}{6}\ln(x^6 + 5) + C \)

35. \( \int \frac{\ln^7 x \, dx}{7x} \)  
   Sol: \( \frac{1}{56}\ln^8 x + C \)
36. \[ \int 7 \sin x \cos x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{7 \sin x}{\ln 7} + C \]

37. \[ \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C \]

38. \[ \int \frac{1}{x \ln x} \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \ln(\ln|x|) + C \]

39. \[ \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{1}{2 \cos^2 x} + C \]

40. \[ \int \cot x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \ln|\sec x| + C \]

Calcular, mediante el método de integración por partes, las siguientes integrales.

41. \[ \int x \cos x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } x \sin x + \cos x + C \]

42. \[ \int 3x \cdot 3^x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{3^{x+1}(x \ln 3 - 1)}{\ln^2 3} + C \]

43. \[ \int x e^{-x} \, dx \]  
\[ \text{Sol: } -e^{-x}(1 + x) + C \]

44. \[ \int x \ln x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{x^2(2 \ln x - 1)}{4} + C \]

45. \[ \int x^2 \cos 2x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \]

46. \[ \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx \]  
\[ \text{Sol: } -\frac{1 + \ln x}{x} + C \]

47. \[ \int e^x \sin x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } \frac{e^x(\sin x - \cos x) + C}{2} \]

48. \[ \int \sin x \ln(1 + \sin x) \, dx \]  
\[ \text{Sol: } x + [1 - \ln(1 + \sin x)] \cos x + C \]

49. \[ \int \ln^2 x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C \]

50. \[ \int \arcsen x \, dx \]  
\[ \text{Sol: } x \cdot \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + C \]
Calcular las siguientes integrales:

51. $\int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}$
   Sol: $\arctan(\ln x) + C$

52. $\int e^{4x}dx
   \frac{1}{1 + e^{-4x}}$
   Sol: $\frac{\arctan e^{4x}}{4} + C$

53. $\int \frac{a \cdot x^n \, dx}{1 + bx^{n+1}}$
   Sol: $\frac{a \ln(1 + b \cdot x^{n+1})}{b \cdot (n + 1)} + C$

54. $\int \frac{3x \, dx}{(x^2 + 1)^2}$
   Sol: $-\frac{3}{2(x^2 + 1)} + C$

55. $\int \frac{x^2 \, dx}{1 + x^6}$
   Sol: $\frac{1}{3} \arctan x^3 + C$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cos^2(\sqrt{x})}}$
   Sol: $2 \tan \sqrt{x} + C$

57. $\int \frac{(e^{2x} + \sec^2 2x) \, dx}{e^{2x} + \tan 2x}$
   Sol: $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \tan 2x) + C$

58. $\int \frac{dx}{x(2 + \ln x)^4}$
   Sol: $\frac{-1}{3(2 + \ln x)^5} + C$

59. $\int \frac{\arcsen x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
   Sol: $\frac{2}{9} \arcsen x \cdot \sqrt{\arcsen x} + C$

60. $\int \frac{e^x \, dx}{(e^x + 4)^3}$
   Sol: $\frac{-1}{2(e^x + 4)^2} + C$

61. $\int \frac{\sen 2x \, dx}{\sqrt{1 - \sen^4 x}}$
   Sol: $\arcsen(\sen^2 x) + C$

62. $\int \frac{e^x + 2 \, dx}{\sqrt{e^x + 2x}}$
   Sol: $2 \sqrt{e^x + 2x} + C$

63. $\int \frac{dx}{\sen^2 x \cdot \cotag x}$
   Sol: $-2 \cotag x + C$

64. $\int x \cdot \sen(\ln x) \, dx$
   Sol: $-\cos(\ln x) + C$

65. $\int \frac{\sqrt{x + \ln x} \, dx}{x}$
   Sol: $2 \sqrt{x + \ln^2 x} + C$
Ejercicios:

1) \[ \int \frac{x}{x^2 - x - 2} dx = \frac{2}{3} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x + 1) \]

2) \[ \int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{8}{3} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x + 1) + cte \]

3) \[ \int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} (\ln|x| - \ln|x + 2| + cte) \]

4) \[ \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 2| + cte \]

5) \[ \int \frac{4x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x} dx = x - \ln|x + 2| + \frac{1}{2} \ln(2x^2 + 1) + cte \]

6) \[ \int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x} dx = 3\ln|x| + \ln|x - 1| + \ln|x + 1| + cte \]

7) \[ \int \frac{dx}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - x + A\ln(2x - 31 + B\ln(2x + 3) + cte \]

8) \[ \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx = 5x + \frac{161}{2} \ln|x - 4| - \frac{7}{3} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + cte \]

9) \[ \int \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6} dx = 137\ln|x - 4| + 2\ln|x - 2| + \frac{5}{2} x^2 + 25x + cte \]

10) \[ \int \frac{4x^3 - 7x}{x^5 - 5x^2 + 4} dx = \frac{\ln[(x^2 - 1)(x^2 - 4)]}{2} + cte \]

11) \[ \int \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} dx = 2\ln|x| - \frac{3}{x - 1} + cte \]

12) \[ \int \frac{3x + 7}{x^2 - x^2 - x + 1} dx = \ln|x + 1| - \ln|x - 1| - \frac{5}{x + 1} + cte \]

13) \[ \int \frac{3x - 15}{x^2 - 3x - 2} dx = \ln|x + 1| - \frac{6}{x + 1} - \ln|x - 2| + cte \]

---

**EJERCICIOS DE RECOPILACIÓN**

1) \[ \int e^{2x+1} + 3e^x - 1 \frac{dx}{e^{-x}} \]

2) \[ \int e^{\frac{3}{x} - 2} \frac{dx}{3(x + 2)} \]

3) \[ \int \sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 3} + 2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \]

4) \[ \int \frac{Ln\sqrt{x}}{x} dx \]

5) \[ \int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}} dx \]

6) \[ \int \frac{2^{2x}}{\cos^2(x)} dx \]

7) \[ \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} dx \]

8) \[ \int \frac{1}{\sqrt{9 - 6x^2}} dx \]

9) \[ \int (x + 1) \arcsin x \frac{dx}{dx} \]

10) \[ \int e^{-3x} \cos x \frac{dx}{dx} \]

11) \[ \int \cos \frac{Lnx}{x} \frac{dx}{dx} \]

12) \[ \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \frac{dx}{dx} \]

13) \[ \int \frac{1}{x \ln x} \frac{dx}{dx} \]

14) \[ \int \frac{5x}{x^2 + 1} \frac{dx}{dx} \]

15) \[ \int \frac{6x}{(2x^2 + 9)^2} \frac{dx}{dx} \]

16) \[ \int (3x - 2) e^{2x^3} \frac{dx}{dx} \]

17) \[ \int \frac{6x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{4 + x^2} \frac{dx}{dx} \]

18) \[ \int \frac{5x^3 - x + 1}{x^3 - 2x} \frac{dx}{dx} \]

19) \[ \int \frac{2x}{(6x^2 + 4)} \frac{dx}{dx} \]

20) \[ \int 6xe^{-9x^2 + 5} \frac{dx}{dx} \]

21) \[ \int \frac{2x^2 - 8x + 1}{2x^2 - 7x + 3} \frac{dx}{dx} \]

22) \[ \int 6xe^{-9x^2 + 5} \frac{dx}{dx} \]
23) $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} \, dx$

24) $\int (\cos 2x + \sin^2 x + \cos^2 x) \, dx$

25) $\int \sin x \cos^4 x \, dx$

26) $\int \sin^2 (8x + 2) \cos (8x + 2) \, dx$

27) $\int x \cos (4x - 1) \, dx$

28) $\int \frac{\arcsen 5x}{\sqrt{1 - 25x^2}} \, dx$

29) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

30) $\int \sqrt{1 - \ln x} \cdot \frac{dx}{x}$